

最適金融政策における政策バッファ効果*

荒井 壮一

要旨

本稿の目的は、正のインフレ率目標を設定することで得られる流動性の罍に対する政策バッファの有効性を、ニューケインジアン型の最適金融政策モデルを用いて明らかにすることである。この目的のために、標準的なモデルに対して、(1)連続時間モデルとして分析すること、(2)中央銀行がインフレ率目標を独自に設定すること、(3)中央銀行が固有の割引率を持つこと、(4)民間のバックワード・ルッキングな期待を表す変数を導入すること、という4つの拡張を加える。本稿の分析から、ニューケインジアン型の最適金融政策モデルにおいても、ほとんどの場合において政策バッファ効果の有用性が確認できること、そして長期的な視野を持つ中央銀行の下では政策バッファ効果が十分に活用されることがわかった。

1 はじめに

近年、名目金利の非負制約下における金融政策についての研究が盛んに行われている。Summers (1991) は、その草分け的存在である。彼は、流動性の罍に対処するため、あるいは非負制約に陥る危険性を低下させるためには、中央銀行による正の目標インフレ率の設定が有効である、という政策提言を行った。本稿ではこれを、中央銀行の事前の準備によって生じる「政策バッファ効果」と呼ぶことにする。

こうした非負制約についての研究は、1999年の日本銀行によるゼロ金利政策の導入以降、特に急速に発展してきた。しかしながら、近年の理論的研究においては、Summers (1991) の先駆的な視点は必ずしも継承されていない。例えば、ニューケインジアン型のモデルを用いて、非負制約下の最適な金融政策について分析した代表的な研究として、Eggertsson and Woodford (2003) や Jung *et al.* (2005), Adam and Billi (2007) がある。これらのいずれもが、「将来の非負制約によって生じる金融緩和の限界に対応するため、非負制約に陥っていない時点から、名目金利を先行して引き下げておく」という中央銀行の最適な政策反応を描写している。こうした金融政策は、「予防的 (preemptive) 政策」と呼ばれているが、その主要な焦点は、名目金利の動学過程にある。こ

* 本稿の作成において、西山慎一先生（東北大学）、秋田次郎先生（東北大学）、北川章臣先生（東北大学）、鴨池治先生（東北福祉大学）から多くのコメントを頂いた。また、日本金融学会2010年度春季大会において、本稿の基礎となった研究に対して、寺西勇生氏（日本銀行）から貴重なコメントを頂いた。さらに、編集委員長の櫻川昌哉先生（慶應義塾大学）および匿名のレフェリーからのコメントによって、論文が大幅に改善された。これらの方々には深く謝意を表したい。なお、本文中にありうべき誤りはすべて筆者の責任である。

れに対して、Summers (1991) による提言の焦点は、目標インフレ率の設定にあるという点において、両者の議論には若干の隔りがある。

本稿では、この相違に着目して、Summers (1991) の問題意識に立ち返る。そして、ニューケインジアン型の理論モデルを用いて、彼が提唱する政策バッファー効果の有効性を明らかにする。具体的な分析枠組みとしては、標準的なモデルをベースとして、(1) 連続時間モデルへの変更、(2) 中央銀行による目標インフレ率の設定、(3) 中央銀行固有の割引率の導入、(4) バックワード・ルッキングな期待項の導入という、4つの拡張を加えたモデルを用いる。

なお、政策バッファー効果を取り扱った先行研究としては、Reifschneider and Williams (2000) がある。彼らは、伝統的なケインジアン・モデルの枠内において、標準的なテイラー・ルールと、より積極的な金融緩和を表すヘンダーソン=マッキビン・ルールの2つの異なる政策ルールを取り上げ、それぞれのルールと非負制約の関係についての比較分析を行った。とりわけ、一定期間の時系列データに基づいた彼らのシミュレーション分析からは、後者のルールの下では、(1) 非負制約に陥る回数が上昇するとともに、(2) 目標インフレ率を追加的に高めに設定した際の、ゼロ金利期間の割合の改善度が小さくなる、という結果が得られている。これに対して本稿では、ミクロ的基礎付けを有するニューケインジアン型のモデルを用いることによって、政策バッファー効果についての、より厳密な政策インプリケーションを引き出すことを試みる。そして、彼らの分析結果と、本稿の分析結果を比較することを通して、政策バッファーという政策提言の頑健性を検証する。

本稿で得られる主な結論は次のとおりである。まず、ニューケインジアン型モデルが前提とするほとんどの場合において、政策バッファー効果は有効に機能する。しかしながら、その効果の大きさは、中央銀行の政策スタンスに依存して変化する。具体的には、テイラー型金利決定式について、産出量ギャップに係る係数の値が大きく、中央銀行が積極的な政策スタンスを採用している場合、政策バッファー効果は相対的に小さくなってしまふ。こうした分析結果は、Reifschneider and Williams (2000) による比較分析結果と整合的である。さらにいえば、本稿のモデルにおいては、テイラー型金利決定式の係数は、中央銀行の視野の長さ、具体的にはその割引率の大小に依存して変化する。このことを踏まえて、長期的な視野、すなわち小さい割引率を持つ中央銀行の最適政策の下では、政策バッファー効果が十分に活用される、ということがわかった。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では理論モデルを提示する。3節では、モデルを用いて、経済が非負制約に陥る瞬間のメカニズムを明らかにする。そして、政策バッファー効果の詳細を示す。4節では、分析結果の直観的な解釈について議論する。5節では、結論を述べる。

2 モデル

近年の金融政策分析においては、New IS-LM モデルとも呼称される、ニューケインジアン型のモデルを用いることが一般的となっている。これは、家計行動を表す総需要関数と、企業の価格決定を表す Calvo (1983) 型のフィリップス曲線から構成されるものであるが、この両者はいずれも経済主体の最適化行動から導かれる。この点こそが、ニューケインジアン型モデルが厳密なミクロ的基礎付けを持っているといわれる理由である。本稿では、こうした標準的なニューケインジアン型のモデルにいくつかの拡張を加え、政策バッファー効果をとらえるためのモデルを構築する。また、この際、中央銀行の金融政策を、特定の目的関数に従う最適化行動として定式化する。これは、テイラー型ルールに代表されるシンプルな金利決定式を用いるアプローチとは大きく異なるものである。

本稿と同様に、標準的なニューケインジアン型モデルを用いて、非負制約下における中央銀行の

最適金融政策を分析した先行研究としては、Jung *et al.* (2005), Adam and Billi (2007) がある。これらの焦点はいずれも、非負制約に陥った後の調整過程を描写するところにある。これに対して本稿では、非負制約に陥る直前の状況に焦点を当てることによって、目標インフレ率と非負制約の関係を明らかにすることを試みる。なお、本稿の分析は、モデルの不確実性を決定論的なものに限定しているという意味において、Jung *et al.* (2005) と若干の共通点を持っている。

モデルの構造式は、以下のとおりである。

$$\dot{x}(t) = \frac{\kappa}{\sigma\beta}x(t) - \frac{1}{\sigma\beta}\pi(t) + \frac{1-\beta}{\sigma\beta}\pi^{BL}(t) + \frac{1}{\sigma}(i(t) - r^n(t)), \quad (1)$$

$$\dot{\pi}(t) = -\frac{\kappa}{\beta}x(t) + \frac{1-\beta}{\beta}\pi(t) - \frac{1-\beta}{\beta}\pi^{BL}(t), \quad (2)$$

$$\dot{\pi}^{BL}(t) = -(1-\alpha)\pi^{BL}(t) + (1-\alpha)\pi^*, \quad \pi^{BL}(0) = 0, \quad (3)$$

$$0 \leq i(t), \quad (4)$$

$$\dot{r}^n(t) = -(1-\omega)(r^n(t) - \bar{r}), \quad r^n(0) = \varepsilon(0) + \bar{r}. \quad (5)$$

(1)式は、ニューケインジアン型の総需要関数を表す微分方程式である。¹⁾これは家計の効用最大化から導かれるオイラー方程式に由来する動学方程式であり、ここで x は産出量ギャップ、 π はインフレ率を表す。 i は名目金利であり、中央銀行の政策変数である。 r^n は自然利子率であり、その動学経路は外生的に決定される。 $\sigma^{-1}(>0)$ は、家計の消費における異時点間の代替弾力性に対応するパラメータである。

(2)式は、Calvo (1983) 型のニューケインジアン・フィリップス曲線に、若干の拡張を加えたものである。 $\beta \in (0, 1)$ は割引因子を表すパラメータである。 $\kappa (> 0)$ は、産出量ギャップに対するインフレ率の感応度を表すパラメータである。 π^{BL} は、民間のバックワード・ルッキングな期待形成を表す変数であり、 $\alpha \in (0, 1)$ は、その調整の早さを表す代替パラメータである。(3)式から明らかかなように、 π^{BL} は長期的には中央銀行の目標インフレ率 π^* に一致するが、このことは、民間が中央銀行の目標インフレ率を即座に把握することは不可能であり、特定の学習ルールに従って、目標についての情報をアップデートする、ということの意味している。²⁾

(4)式および(5)式は、名目金利の非負制約と、外生的に変動する自然利子率の動学をそれぞれ表

1) ニューケインジアン型モデルは一般的に離散時間の差分方程式で表されるが、ここではそれを連続時間の微分方程式として扱う。例えば(1)式および(2)式は、それぞれ以下の差分方程式を置き換えたものである。

$$x_t = E_t x_{t+1} - \sigma^{-1} \{ (i_t - E_t \pi_{t+1}) - r_t^n \}, \\ \pi_t = \kappa x_t + \beta E_t \pi_{t+1} + (1-\beta) \pi_t^{BL}.$$

ここで E は期待値オペレータを表す。本稿では不確実性を確定的なものに限定しているため、実現する値と期待値は常に一致する。このことを踏まえると、上式は以下のように書き換えられる。

$$x_{t+1} - x_t = \frac{\kappa}{\sigma\beta} x_t - \frac{1}{\sigma\beta} \pi_t + \frac{1-\beta}{\sigma\beta} \pi_t^{BL} + \frac{1}{\sigma} (i_t - r_t^n), \\ \pi_{t+1} - \pi_t = -\frac{\kappa}{\beta} x_t + \frac{1-\beta}{\beta} \pi_t - \frac{1-\beta}{\beta} \pi_t^{BL}.$$

ここで $\dot{x} \equiv \Delta x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$ を参照すると、 $x_{t+1} - x_t$ は h を 1 と置いたときの x の変化量に対応していることがわかる。以上のことから、本稿では $x_{t+1} - x_t$ を $\dot{x}(t)$ に置き換えたものを、元の構造式に対応する微分方程式として扱うことにする。 π_t や他の変数についても同様である。なお、連続時間に置き換えることによる分析上のメリットについては、2.2節で述べる。

している。ここで $\varepsilon(0)$ は、 $t=0$ 時点に生じる確定的ショックを表す。 $\bar{r}(>0)$ は、 r^n の定常値を表す。 $\omega \in [0, 1)$ はショックの持続性を決定づけるパラメータである。

2.1 中央銀行の最適化問題

中央銀行は、(1), (2), (3), (4), (5)式で表される経済の構造方程式を制約条件として、以下の形状で表される目的関数を i_t の系列について最小化するための金融政策を行う。

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \{(\pi(t) - \pi^*)^2 + \theta x(t)^2\} dt. \quad (6)$$

ここで、 ρ は中央銀行の割引率を表す。 $\theta(>0)$ は、インフレ率の目標からの乖離と、産出量ギャップのいずれの安定化を重視するかを表す、相対パラメータである。標準的な最適金融政策モデルにおいては、中央銀行の目標インフレ率が定常値に常に等しいこと ($\pi^*=0$)、中央銀行と民間の割引因子がそれぞれ等しいこと、という暗黙的な前提を用いることが一般的である。

これに対して本稿では、そうした標準的な設定からの若干の逸脱を試みる。具体的には、 $\pi^* \geq 0$ であること、そして中央銀行が独自の割引率 ρ を持つこと、という異なる前提を用いる。したがって、本稿における最適政策は、社会厚生を最大化するものとは必ずしもいえない。この意味において、本稿のモデルは、厳密な最適金融政策モデルではなく、次善の (second-best) 最適金融政策モデルである、ということになる。

また、分析においては以下の4つの前提を置く。³⁾

1つは、 $\pi^{BL}(0)=0$ である。 $\pi^{BL}(0)$ は、民間のバックワード・ルッキングな期待の初期値であり、計画初期時点において、民間がどのような期待を形成しているかということを表している。したがってこの前提は、中央銀行によってゼロインフレ目標が設定されていると民間が予想する一方で、中央銀行は独自の目標 π^* を設定し、その予想を短期的に裏切ることが可能である、ということの意味している。この結果、本稿のモデルにおける停留点は、短期的には貨幣中立的とはならない。⁴⁾

2つめは、中央銀行の割引率 ρ を、 $\rho \in [0, +\infty)$ であるような、連続的に変化するパラメータとして扱うことである。既存の最適金融政策モデルにおいては、中央銀行が1期間だけの最適化を行う場合に実現する裁量解と、無限視野の最適化を行う場合に実現する公約解について、それぞれを比較するという分析手法が広く見られる。これに対して本稿では、公約解における中央銀行の割引率に注目し、その違いによって、政策バッファがどのように変化するか、という点を明らかにすることを試みる。

3つめは、外生的な自然利子率ショックは1期限りであり、それに伴う状態のジャンプもまた1期限りである、というものである。この場合、ショック後の経済の調整過程は、外生的に決定される自然利子率の動学過程に依存して、緩やかに推移することになる。

2) なお、ここでの π は、定常値からの乖離ではなく、水準を表す。また、(2)式はインフレ率のトレンド項を含んでいる。こうしたトレンド項を含むフィリップス曲線を扱うにあたっては、本来的には、厳密なミクロ的基礎付けを有する Ascari (2004), Cogley and Sbordone (2008) による定式化を援用することが適切である。しかしながら、彼らが導出したフィリップス曲線は、再帰的な (recursive) 形状とはならないことに起因して、解析的な分析に用いる上での著しい困難さを有している。こうした背景から、本稿では分析の簡単化のため、アドホックな定式化である (2)式を用いることにする。

3) これらの前提のうち、3つめと4つめのものに関しては、Jung *et al.* (2005) において前提とされているものと同様である。これらは、ショック後の調整過程についての分析を行う場合、特に重要となる。この点については、付録 B において詳細を述べる。

4) なお、長期的には民間のバックワードな期待が調整されるため、貨幣中立な定常状態が実現する。詳細については、付録 A において述べる。

4つめは、経済の初期状態と、モデルの定常状態についてのものである。最適化問題が非負制約を含む場合、モデルには、内点解と端点解の、2つの動学が生じることになる。これは、モデルに2つの停留点、すなわち非負制約が有効とはならない均衡と、長期均衡において非負制約が有効となり続ける「デフレ均衡」が含まれることを意味している。⁵⁾これについて以下では、後者の停留点が長期均衡になる可能性を排除する。したがって、ショックが生じていない状況、例えばモデルの初期状態においては、内点解の均衡が実現しているものとする。

2.2 連続時間による分析

伝統的なケインジアン・モデルと比較して、ニューケインジアン型のモデルは、解析上の困難を伴うことが多い。この原因としては、モデルの動学において不確実性が重要な役割を果たす点や、状態変数がフォワード・ルッキングな変数として定式化されている点を指摘することができる。また、非負制約を考慮した最適金融政策モデルにおいては、不等式制約の非線形性に起因して、解析的な最適解の導出がほとんど不可能になるということも、注目すべき点である。

これについて、確定的なショックのみに限定した状況においては、ニューケインジアン型の最適化行動モデルの扱いを単純化し、解析的な性質を明らかにする方法がある。それは、一般には離散時間の差分方程式体系として表されるモデルを、連続時間の微分方程式体系として扱い、最大値原理を用いて解くことである。連続時間の最大値原理問題として扱うことのメリットは、大きく分けて2つある。1つは、最大値原理の汎用性の高さである。上述したモデルのように、制御変数に有界制約が課された最適化問題においては、解経路について微分不可能な点を含む、Bang-Bang制御となる可能性がある。こうした解経路を扱うことのできる手法として、最大値原理は最も簡単である。2つには、最適化の1階の条件をはじめとした、各種の条件式の導出が簡単になることである。差分方程式モデルに特有の問題として、解を導出する過程において、多くの状態変数が出現し、その取り扱いが困難となる点が挙げられる。微分方程式を用いることは、この点についてのいくらかの改善をもたらす。以上の利点を踏まえて、本稿では、連続時間による分析を行う。⁶⁾

2.3 最適性の条件

最適化問題のハミルトニアンは、以下のとおりである。

$$H \equiv -e^{-\alpha t} \{ (\pi - \pi^*)^2 + \theta x^2 \} + q_1 e^{-\alpha t} \left(\frac{\kappa}{\sigma \beta} x - \frac{1}{\sigma \beta} \pi + \frac{1-\beta}{\sigma \beta} \pi^{BL} + \frac{1}{\sigma} i - \frac{1}{\sigma} r^n \right) + q_2 e^{-\alpha t} \left(-\frac{\kappa}{\beta} x + \frac{1-\beta}{\beta} \pi - \frac{1-\beta}{\beta} \pi^{BL} \right). \quad (7)$$

$q_1 e^{-\alpha t}$ 、 $q_2 e^{-\alpha t}$ はそれぞれ(1)、(2)式に対応する補助変数である。最適性の条件は、以下のよう
に導出できる。

$$\frac{\partial H}{\partial i} = q_1 e^{-\alpha t} \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} q_1 > 0 & \Rightarrow i = \infty, \\ q_1 = 0 & \Rightarrow i \text{ は不定}, \\ q_1 < 0 & \Rightarrow i = 0, \end{cases} \quad (8)$$

5) Benhabib *et al.* (2002) や Schmitt-Grohé and Uribe (2009) は、非負制約を導入したモデルにおいて複数均衡が実現することを示した上で、均衡の大域的な安定性について議論している。本稿では、分析の焦点から外れるため、こうした複数均衡の安定性を取り扱うことはしない。

6) こうした手法を採用する理由は、例えばモデルの大域的な安定性について論じるためとといったものではなく、あくまでモデルの特性を把握しやすくするためである。Iwamoto (2004) は、非負制約から脱却する上で必要となる金融政策ルールを明らかにするために、ニューケインジアン型の構造方程式を微分方程式として扱い、位相図を用いた明快な動学分析を行った。連続時間による明快な分析を指向しているという意味において、本稿は彼の研究と若干の共通点を持っている。

$$\frac{d(q_1 e^{-\rho t})}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{q}_1 = 2\theta x + \left(\rho - \frac{\kappa}{\sigma\beta}\right)q_1 + \frac{\kappa}{\beta}q_2, \quad (9)$$

$$\frac{d(q_2 e^{-\rho t})}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \pi} \Rightarrow \dot{q}_2 = 2\pi + \frac{1}{\sigma\beta}q_1 + \left(\rho - \frac{1-\beta}{\beta}\right)q_2 - 2\pi^*, \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1 e^{-\rho t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_2 e^{-\rho t} = 0. \quad (11)$$

(8)式は、制御変数についての最適条件である。非負制約について、このように簡潔に条件を書き表すことができる点が連続時間の最大値原理における利点である。(9)、(10)はそれぞれ、 x, π についての1階の条件である。また、(11)は横断性条件を表す。

(8)式を見てわかるとおり、 $q_1 < 0$ となるとき、非負制約は有効となり、経済は端点解の動学に従うことになる。一方、 $q_1 = 0$ となるとき、名目金利の非負制約は何らかの正の値をとる。同様にして、このとき経済は内点解の動学に従うことになるが、本稿ではこれを特異動学と呼ぶ。⁷⁾ ショック後の調整過程においては、端点解の動学が特に重要となる一方で、ショック直前およびその瞬間をとらえる上では、特異解の動学が特に重要となる。以下では、本稿の問題意識を踏まえて、端点解の動学よりもむしろ、特異解の動学について、詳細に検討する。

2.4 特異解の動学と最適テイラー・ルール

後述することであるが、計画初期時点において十分に大きなショックが生じた場合、中央銀行にとって、定常状態における金利設定ルールを維持することが不可能となる。この結果、モデルの動学が端点解の動学へと切り替わるが、これは経済が非負制約に陥ることと同義である。この際、中央銀行の政策スタンス次第で、所与の同じショックに対して、経済が非負制約に陥る場合もあれば、そうならない場合も起こりえる。本稿では、このことを、中央銀行の政策スタンスに依存して「非負制約に陥る蓋然性」が変化すると表現する。これをとらえる上では、ショックの瞬間の状態、すなわち特異解の動学について詳細に分析することが必要不可欠である。⁸⁾

特異解の動学における、名目金利の最適条件を表す(8)式から、明らかに $\dot{q}_1 = q_1 = 0$ である。これを踏まえて、(9)式から q_1 の2階微分を求めたものに(10)式を代入すると、 x の動学方程式が求められる。

$$\ddot{q}_1 = 2\theta \dot{x} + \left(\rho - \frac{\kappa}{\sigma\beta}\right)\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 \Rightarrow \dot{x} = \left(\rho - \frac{1-\beta}{\beta}\right)x - \frac{\kappa}{\theta\beta}\pi + \frac{\kappa}{\theta\beta}\pi^*. \quad (12)$$

(1)、(12)式を連立させると、この動学における名目金利を表す関係式が得られる。

$$i_{op}(t) = r^n(t) + \frac{\sigma\{\rho\beta - (1-\beta)\} - \kappa}{\beta}x(t) + \frac{\theta - \sigma\kappa}{\theta\beta}\pi(t) + \frac{\sigma\kappa}{\theta\beta}\pi^* - \frac{1-\beta}{\beta}\pi^{BL}(t) (\geq 0). \quad (13)$$

(13)式は、インフレ率および産出量ギャップに反応して名目金利を決定するという、中央銀行にとってのテイラー型の金利反応式を表す。 i_{op} は、非負制約が有効でない場合における、中央銀行が採用すべき金利の値を示している。本稿ではこれを、便宜的に最適テイラー・ルールと呼ぶ。 r^n への外生的ショックが生じ、この式が示す値が負となった場合、中央銀行が最適な金利を維持し続けることは不可能となり、非負制約が有効となる。

7) 「特異」とは、損失関数を行列形式に書き改めたとき、制御変数についての係数行列が特異行列となることを表す。

8) Jung *et al.* (2005) が描写したショック後の調整過程をとらえる上では、端点解の動学が重要となる。この点は本稿の主要な焦点ではないが、彼らがとらえた調整過程が本稿のモデルでどのように表されるかについては、付録Bにおいて詳細を述べる。

計画初期時点における仮定、すなわち初期時点において非負制約は有効ではないこと、そして $\pi^{BL}(0)=0$ であることを踏まえると、 $t=0$ 時点において示唆される最適な名目金利の値は、以下のとおりとなる。

$$i_{op} = r^n + \frac{\sigma\{\rho\beta - (1-\beta)\} - \kappa}{\beta} x + \frac{\theta - \sigma\kappa}{\theta\beta} \pi + \frac{\sigma\kappa}{\theta\beta} \pi^* (\geq 0). \quad (14)$$

テイラー・ルールにおける x, π に係るパラメータの大きさは、分析上、重要な意味を持っている。Taylor (1993) におけるオリジナルのテイラー・ルールは、以下のように表される。

$$i_t = r^n + f_1 x + \pi + f_2 (\pi - \pi^*) \quad (15)$$

彼は、(15)式において $f_1=f_2=0.5$ とした場合、フェデラル・ファンドレートの変動がうまく説明されることを示した。これに対して Henderson and McKibbin (1993) は、 $f_1=2.0, f_2=1.0$ のような、経済変動に対して積極的に金利を変動させるルールの方が、より経済の安定化に役立つ、と主張した。この意見の対立について Reifschneider and Williams (2000) は、名目金利の非負制約に陥る可能性がある場合、2つのいずれのルールが望ましいと考えられるかについて論じた。彼らの確率的シミュレーション分析からは、後者のルールの方が、非負制約に陥る回数がより多く、その期間もより長くなる、という結果が得られている。

こうした議論を踏まえて、本稿における(14)式を顧みると、 f_1 に相当する政策パラメータは、中央銀行の割引率を表す ρ の影響を受けることがわかる。具体的には、 $\frac{\partial f_1}{\partial \rho} = \sigma > 0$ であることから、 ρ が大きく、中央銀行の視野が短期的な場合は、 f_1 は大きくなる。このとき中央銀行は、 x の変動に対して、より積極的に金利を変化させることになる。このことは、中央銀行の視野が短期的な場合、政策ルールはテイラー・ルールよりもむしろ、ヘンダーソン=マッキビン・ルール (HMルール) に近づく、ということを示している。

本稿では、こうした最適テイラー・ルールと既存のシンプル・ルールの関連性に注目し、短期的視野の場合と、長期的視野の場合のそれぞれにおける政策ルールについて、非負制約に陥る蓋然性の高さを比較する。すなわち、Reifschneider and Williams (2000) におけるルールの比較分析を、最適金融政策モデルにおいて行う、ということである。⁹⁾

なお、(9)式に $\dot{q}_1=q_1=0$ を代入することによって、特異解の動学における残りの変数である q_2 が求められる。

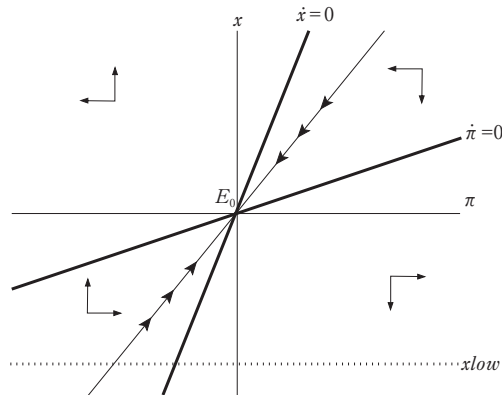
$$q_2 = -\frac{2\theta\beta}{\kappa} x. \quad (16)$$

常に $q_1=0$ が成り立ち、そしてまた、各時点の q_2 は x と 1 対 1 関係で求められることから、この動学は、実質的には(12)、(2)式と、その裏で成立している名目金利の値を示す(14)の3つの関係式で成り立っていることがわかる。 x, π についての微分方程式を行列表示で表したものは、以下のとおりである。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\pi} \end{bmatrix} = A_s \cdot \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\kappa}{\theta\beta} \pi^* \\ -\frac{1-\beta}{\beta} \pi^{BL} \end{bmatrix}, \quad A_s \equiv \begin{bmatrix} \rho - \frac{1-\beta}{\beta} & -\frac{\kappa}{\theta\beta} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1-\beta}{\beta} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

9) 一方、 ρ の変化によって f_2 に相当する係数は変化しないため、厳密に Reifschneider and Williams (2000) と同じ分析ができるわけではない。

図1 特異解の動学の位相図



(17)式からわかるとおり、この体系から得られるモデルの停留点は、外生変数である π^{BL} に依存して変化する。これについて本稿では、 π^{BL} の調整が十分に行われていない状態におけるモデル停留点を、短期均衡であると解釈する。そして、そこで成立する産出量ギャップの値およびインフレ率について、それぞれ $\bar{x}(t), \bar{\pi}(t)$ で表す。特に、計画初期時点において成立している短期均衡の値について、同様に $\bar{x}_0, \bar{\pi}_0$ で表す。一方、 π^{BL} の調整が十分に行われた後に成立するようなモデルの停留点を、長期均衡あるいは定常状態であると解釈する。ここで成立する値について、同様に $\bar{x}_{ss}, \bar{\pi}_{ss}$ で表す。これについては、常に $\bar{x}_{ss}=0, \bar{\pi}_{ss}=\pi^*$ が成立する。¹⁰⁾

3 名目金利の非負制約と政策バッファ

本節では、特異解の動学方程式を用いて、名目金利の非負制約と政策バッファの関係を明らかにする。図1は、計画初期時点における $\pi-x$ 平面の位相図を表したものである。なお、当面の間、議論の簡単化のために、 $\pi^*=0$ として考察を行う。図中の点 $E_0(\bar{\pi}_0, \bar{x}_0)$ は、特異解の動学における停留点である。 $\pi^*=\pi^{BL}=0$ であることから、この場合、 E_0 は定常状態と一致する。

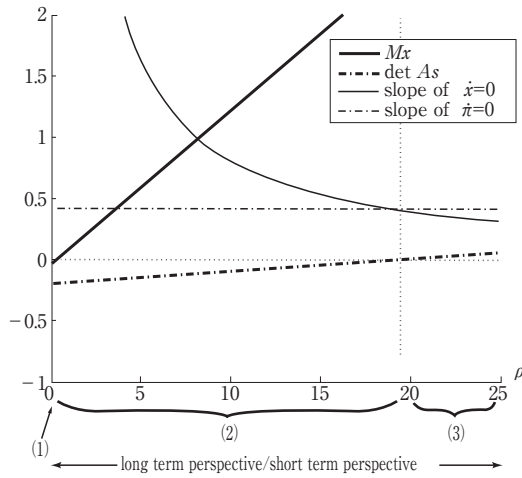
さらに付け加えると、この図においては、 $a_{11} \equiv \rho - \frac{1-\beta}{\beta} > 0$ の仮定を課している。 a_{11} の値は、位相図における $\dot{x}=0$ 線の傾きに影響を与えるが、これは ρ, β の値に依存して正負いずれの値もとりうる。しかしながら、一般に β は1に限りなく近い値と考えられていることを踏まえ、 $\beta \rightarrow 1$ のケースを考えると、 $a_{11} \rightarrow \rho > 0$ となる。以上の仮定は、こうした結果を踏まえたものである。

x, π はジャンプ変数であるから、ショックが一瞬のものであった場合、位相図はほとんど意味を持たない。これに対して、ショックが持続し、しかも状態のジャンプが計画初期時点においてのみ生じるという仮定を課した場合、経済が再び定常状態に移行するまでの移行動学が生じうるため、位相図による分析が重要となってくる。

仮に A_s の行列式が負であったとすれば、図1は鞍点体系となり、収束する安定的な経路はただ1つ存在することになる。本稿ではこれを、安定的特異軌道と呼ぶ。 $i \geq 0$ を満たすような安定的特異軌道に経済があれば、最適テイラー・ルールに従って金利を設定することで、中央銀行は経済を定常状態 E_0 へ導くことが可能である。

10) モデル停留点の詳細については、付録Aで述べる。

図2 体系を決定づけるパラメータ



3.1 自然利子率ショックと最適テイラー・ルール

前節で見たとおり、特異解の動学において特に重要なのは、安定的特異軌道および、そこで成立している最適テイラー・ルールである。この軌道上では、 x, π について以下の関係が常に成立している。

$$\pi = \bar{\pi}_0 + p_1(x - \bar{x}_0), \quad p_1 = \frac{\kappa}{1 - \beta - \beta\lambda_1}.$$

ここで λ_1 は、行列 A_s の2つの固有値のうち、負の値をとるものを表す。このことを用いて、 i_{op} を x の関数として表すことができる。¹¹⁾

$$i_{op} = r^n + M_x x + N_x \geq 0, \quad M_x = \frac{\sigma\{\rho\beta - (1-\beta)\} - \kappa}{\beta} + \frac{p_1(\theta - \sigma\kappa)}{\theta\beta}, \quad N_x = \frac{\theta - \sigma\kappa}{\theta\beta} (\bar{\pi}_0 - p_1\bar{x}_0) + \frac{\sigma\kappa}{\theta\beta} \pi^*. \quad (18)$$

モデルの特性を把握する上で、 M_x の値と、行列 A_s の行列式の値 $|A_s|$ の、それぞれの符号は非常に重要である。

図2は、表1に示されるパラメータ設定の下で、 $M_x, |A_s|$ 、そして上で仮定した a_{11} の値を、合わせて示したものである。横軸は ρ であり、ゼロに近づけば長期的視野の政策スタンスとなることを、右方向に増大していけば短期的視野の政策スタンスとなることを、それぞれ表している。図に示されるとおり、それぞれの符号の組合せは、大きく3つのパターンに分けられる。(1)は $M_x < 0$ かつ $|A_s| < 0$ となる状況であるが、極端に ρ が小さいとき、特に、すでに仮定した $a_{11} > 0$ を満たさないような領域においてのみ実現する。また、(3)は、 $M_x > 0$ かつ $|A_s| > 0$ となる状況であるが、 $\beta \rightarrow 1$ としたとき $|A_s| \rightarrow -\frac{\kappa_2}{\theta} < 0$ となることから、これが多くの場合に成立するとは考えづらい。以上のことを踏まえて、以下の分析においては、(2)の、 $M_x > 0$ かつ $|A_s| < 0$ となるパターンに限定して分析を行う。

$M_x > 0$ を仮定したとき、最適テイラー・ルールの示す値がちょうどゼロとなる点は、位相図の第3象限に位置することになる。このときの x の値、すなわち安定的特異軌道上で最適テイラー・

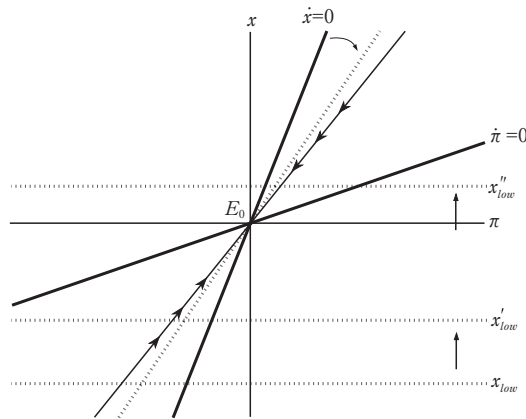
11) π の関数として表しても、同じことである。

表1 パラメータ設定

parameters	values
β	0.99
σ	0.157
κ	0.024
θ	$0.048/4^2$
π^*	0

(出所) Jung *et al.* (2005)

図3 x_{low} の上昇



ルールを維持することのできる下限の x の値は、以下の式で表される。

$$x_{low} = -\frac{1}{M_x}(N_x + r^n). \tag{19}$$

(19)式を見てわかるとおり、 r^n が低下した場合、 x_{low} は上昇する。特に、 $n^*=0$ であり、かつ経済が E_0 に位置している場合、 $r^n(0) = \varepsilon(0) + \bar{r} < 0$ となると、 x_{low} の下限ラインは E_0 を超えて上昇する。このことを表したのが、図3における x''_{low} の点線である。この場合、 E_0 において $i_{op,taylor} < 0$ が成立するが、これが Jung *et al.* (2005) の計画初期時点において生じていることである。彼らは、自然利子率が負となると、同時に経済が非負制約に陥ることを半ば暗黙的に前提としたが¹²⁾、以上の議論から、このことはショックの大きさに依存して、必然的に生じることがわかる。

3.2 中央銀行の視野と安全マージン

自然利子率ショックと x_{low} の下限ラインの上昇の関係において、中央銀行の政策スタンスを表すパラメータである、 ρ, π^* の値は非常に重要である。以下で議論するように、非負制約に陥る蓋然性は、これら2つのパラメータに依存して変化するためである。

12) その一方で、仮に $n^* < 0$ となる場合、すなわち中央銀行が過剰に低いインフレ率目標を設定している状況においては、 $r^n(0)$ が負とならない程度のショックでも、経済が非負制約に陥る可能性がある。非負制約を巡る議論として、負の自然利子率が非負制約の原因であるか否か、そして本当に自然利子率が負となりうるか否か、というものがある。ここでの発見は、後者の議論については、対立を緩和させる要因となりうるかもしれない。なぜなら、上述した状況を前提とするならば、経済が非負制約に陥る原因として、厳密に負となる自然利子率ショックを仮定する必要がなくなるからである。

前節で見たとおり、 r^n が低下した場合、 x_{low} の下限ラインが上昇し、それが現在の経済の状態の位置を超えたとき、非負制約が有効となる。この際の、1単位の r^n の低下に対しての x_{low} の上昇量は、(19)式より ρ, π^* に依存せず一定であることがわかる。このため、現在の経済の状態と x の下限ラインとの距離、すなわち $\bar{x}_0 - x_{low}$ が大きければ大きいほど、より大きな自然利子率ショックに対して、 $i_{op} \geq 0$ を維持することが可能であることになる。このことを踏まえて、以下の分析では、 $\bar{x}_0 - x_{low}$ を、ショックに対する「安全マージン」と呼ぶことにする。また、安全マージンが大きく、より大きなショックに耐えられることを、「非負制約に陥る蓋然性が低い」と表現することにする。そして、安全マージンが大きいほど、中央銀行が政策バッファの効果を活用しているものとみなす。

こうした安全マージンおよび非負制約の蓋然性について、まず本節では、 ρ の違い、すなわち中央銀行の視野の長さの違いによる、安全マージンの大きさへの影響について分析する。安全マージンを表す関係式を ρ について微分すると、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial(\bar{x}_0 - x_{low})}{\partial \rho} = \frac{(1-\beta)^2 \kappa \pi^*}{|A_s|^2 \cdot \theta \beta^3} - \frac{1}{M_x^2} \left\{ (N_x + r^n) \cdot \frac{\partial M_x}{\partial \rho} - \frac{\partial N_x}{\partial \rho} \cdot M_x \right\}. \quad (20)$$

単純化のために $\beta \rightarrow 1$ としてみると、(20)式は、 $\pi^* \geq 0$ かつ $r^n > 0$ の下で、常に正の値をとることがわかる。したがって、ショックが生じる直前の状況において $r^n > 0$ が成立することを踏まえると、 $\partial x_{low}^0 / \partial \rho$ は全体として正の値となり、 ρ の増加関数となることがわかる。すなわち、 ρ が高いほど、安全マージンは小さくなり、同時に非負制約に陥る蓋然性は高まる。このとき、図3に示されるように、 x の下限が x_{low} まで上昇し、同時に $\dot{x} = 0$ 線の傾きが小さくなる。

このことを2.4節におけるテイラー・ルールの係数の問題と合わせて考えると、中央銀行の視野が短期的なものであればあるほど、金利ルールはより積極的なものとなり、同時に、非負制約に陥る蓋然性は高くなる、ということがわかる。

3.3 目標インフレ率と安全マージン

次に本節では、中央銀行による π^* の設定が、安全マージンの大きさに対してどのような影響を与えるか、という点について分析する。

これについて、まず、Summers (1991)が示唆するところの、 π^* の増加による安全マージンの拡大が、本稿のモデルにおいても成立するか否かを確認しよう。 π^* の変化による安全マージンの変化量は、以下の式で表すことができる。

$$\frac{\partial(\bar{x}_0 - x_{low})}{\partial \pi^*} = - \frac{(1-\beta)\kappa}{|A_s| \cdot \theta \beta^2} + \frac{1}{M_x} \cdot \frac{\partial N_x}{\partial \pi^*}. \quad (21)$$

これまでと同様の仮定の下で、 $\beta \rightarrow 1$ とした場合、(21)式は常に正の値をとる。これはつまり、ほとんどの場合において、高めの π^* の設定は、安全マージンの拡大と、非負制約に陥る蓋然性を低くすることにつながる、ということの意味している。したがって、Summers (1991)が提唱する政策バッファ効果は、本稿の最適金融政策モデルにおいても支持される。

さらに、こうした安全マージンの変化量と、中央銀行の政策スタンスの間の関係について分析しよう。1単位の π^* の上昇に対する安全マージンの拡大量は、中央銀行の視野にかかわるパラメータ ρ に依存している。このことを確認するために、(21)式をさらに ρ について微分し、 ρ の変化に対する、安全マージンの変化量を求める。

$$\frac{\partial^2(\bar{x}_0 - x_{low})}{\partial \rho \partial \pi^*} = \frac{(1-\beta)^2 \kappa}{|A_s|^2 \cdot \theta \beta^3} - \frac{1}{M_x^2} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \pi^*} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 N_x}{\partial \rho \partial \pi^*} \cdot M_x \right). \quad (22)$$

同様に、 $\beta \rightarrow 1$ の場合を考えると、 $\theta - \sigma \kappa < 0$ という追加的な前提の下で、(22)式は常に負

図4 安全マージンの大きさと変化量

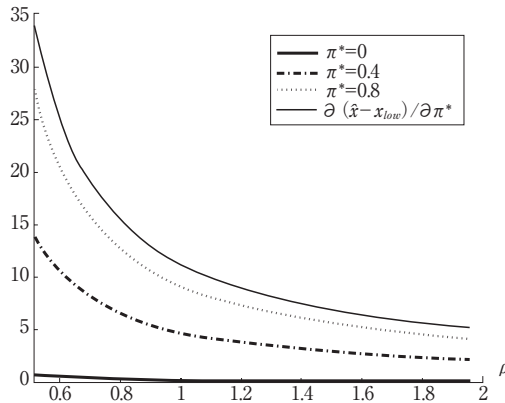


表2 政策ルールとゼロ金利期間

	目標インフレ率(%)				
	0	1	2	3	4
テイラー・ルール					
ゼロ金利期間の割合(%)	14	9	5	1	<1
ゼロ金利持続期間の平均(四半期)	6	5	4	3	2
HMルール					
ゼロ金利期間の割合(%)	31	24	17	11	7
ゼロ金利持続期間の平均(四半期)	6	5	4	3	3

(出所) Reifschneider and Williams (2000)

の値をとることがわかる。¹³⁾ これはつまり、 ρ が高く、中央銀行が短期的な視野での政策運営を行うほど、 π^* の引上げによって追加的に生み出される政策バッファは小さくなってしまふ、ということの意味している。

図4は、表1のパラメータ設定の下で、 $\pi^*=0, 0.4, 0.8$ としたときの、それぞれの安全マージンの大きさを表したものである。また、細い実線は、 π^* の変化に対する安全マージンの変化量を表している。図からわかるとおり、 π^* を増加させたときの安全マージンの拡大量は、 ρ が大きいほど小さくなっていく。

表2に示されるのは、Reifschneider and Williams (2000) による比較分析の結果である。彼らの分析で特に興味深いのは、政策ルールが異なる場合、目標インフレ率を引き上げたときのゼロ金利期間の割合の改善度について、違いが生じることである。表を見てわかるとおり、標準的なテイラー・ルールとHMルールのいずれにおいても、目標インフレ率を引き上げるほど、ゼロ金利期間の割合、すなわち非負制約に陥る蓋然性は低くなる。しかしながら、標準的なテイラー・ルールの下では、 π^* の引上げに伴って、非負制約に陥る蓋然性が大きく改善される一方、HMルールの下では、相対的にそれほど改善が見られない。こうした彼らの比較分析結果は、伝統的なケインジアン型のモデルを用いて得られたものである。これに対して本稿では、ニューケインジアン型のモデ

13) 付録Cにおいて、この仮定の詳細と、その妥当性について述べる。

ルを用いて、より厳密な理論的分析を行ったが、そこでは彼らとおおむね同じ傾向を持つ結論が得られた。このことは、Summers (1991) による政策提言の頑健性を示すものと解釈することが可能である。

4 議 論

前節より、政策バッファ効果の大きさは、中央銀行の政策スタンスに依存して変化するという結論が得られた。本節では、こうした結論がなぜ得られるのかという点について、IS-MP 分析を用いた直観的な解釈を試みる。

本稿のモデルにおける政策バッファ効果は、安全マージンの大きさの変化として表現される。そして、安全マージンの大きさは、 $i_{op}=0$ となる産出量ギャップの下限ラインを表す x_{low} と、産出量ギャップについての短期的なモデル停留点 \bar{x}_0 の 2 つの値に依存して決定される。¹⁴⁾ このうち、前者の値は、最適テイラー・ルールにおける政策パラメータに依存して変化する。例えば、産出量ギャップに係る係数の値が大きく、ショックに対して中央銀行がより過敏に金利を引き下げる場合、金利の下限をヒットする蓋然性は、より高いものとなる。逆もまた然りである。その一方で、後者の値における変化は、 π^* の引上げに伴う 2 つの効果の合算として生じるものであり、若干の複雑な点を含んでいる。

1 つめの効果は、家計行動における将来期待の形成の結果として生じる、IS 曲線のシフトである。政策金利が所与の下で、 π^* の引上げによって期待インフレ率が高まれば、家計は実質金利の低下を予測するはずである。この結果、家計は将来消費を減らし、現在消費を増やす。つまり、 π^* の引上げという金融政策ショックは、期待インフレの形成を通して、正の需要ショックとして IS 方程式に影響を与える。

もう 1 つの効果は、中央銀行の政策の変化によって生じる、MP 曲線のシフトである。(14)式を見てわかるとおり、 π^* の上昇は、 i_{op} の値を上昇させる。これはまさに、Summers (1991) が指摘する π^* 上昇の効果である。本稿の文脈から判断すると、このことは、高めの目標インフレ率の設定が、結果として金融引締めショックの効果を生み出している、ということの意味しているものと解釈できる。

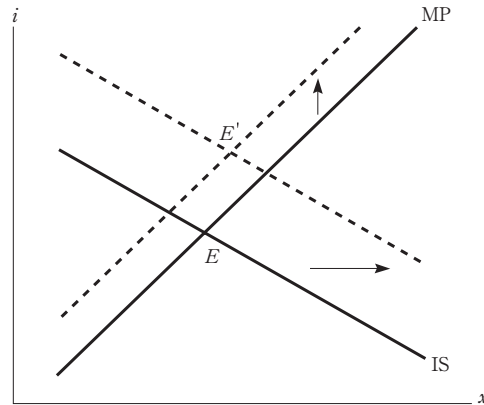
図 5 は、この 2 つの効果を図示したものである。横軸は産出量ギャップを、縦軸は名目金利を表す。 π^* が上昇したとき、IS 曲線と MP 曲線は、ともに上方にシフトする。これによって IS 曲線と MP 曲線の交点が、点 E から点 E' へ移行する。この際、MP 曲線のシフトと比較して、IS 曲線のシフトが十分に大きかったとすれば、名目金利と産出量ギャップは、ともに上昇する。これはすなわち、政策ショックとしての π^* の上昇が、経済を名目金利の非負制約に陥る危険から遠ざける効果を持っている、ということの意味している。

5 結 論

本稿の目的は、正の目標インフレ率を設定することによって得られる、流動性の罫に対処するための安全マージンの有効性を、ニューケインジアン型の理論モデルを用いて明らかにすることであ

14) 本稿のモデルにおいては、民間のバックワード・ルッキングな期待 π^{BL} とは異なる目標 π^* を設定することによって、すなわち民間の予想を裏切ることによって、中央銀行がモデルの短期的な停留点に影響を与えることができる。したがって、短期的には貨幣中立性が成立していない。一方、 π^{BL} が十分に調整された後に成立する定常状態においては、貨幣中立性が成立している。この詳細については付録 A で述べる。

図5 IS-MP分析



った。こうした政策は、Summers (1991) によって提唱されたものであり、本稿ではこれを政策バッファ効果と呼称した。標準的なモデルにいくつかの拡張を加えて分析を進める中で、以下の興味深い結果が得られた。

まず、負の自然利子率ショックが原因となって、経済が非負制約に陥るというメカニズムの詳細を明らかにしたことである。この因果関係は、既存研究では暗黙的に前提とされることが一般的であったが、本稿の分析からは、必然的な帰結であることが示された。また、ニューケインジアンが前提とするモデルのディープ・パラメータの下では、ほとんどの場合において、政策バッファ効果が有効となることが確認された。この点については、さらに、その効果の大きさが中央銀行の割引率、すなわち視野の長さに依存して変化することが明らかになった。とりわけ、中央銀行の割引率が大きく、短期的な視野の下に金融政策を行う場合、最適テイラー・ルールにおける、産出量ギャップにかかる係数が大きくなる。こうした積極的な金利引下げを行う中央銀行が自然利子率ショックに直面した場合、最適テイラー・ルールの示す値が負になってしまう蓋然性は、相対的に高いものになってしまう。すなわち、安全マージンは相対的に小さくなる。加えて、こうした中央銀行の下では、より高い目標インフレ率を設定することによって得られる追加的な安全マージンの拡大幅もまた、相対的に小さいものとなる。これに対して、割引率が小さく、長期的な視野に立った金融政策を行う中央銀行の下では、政策バッファと、その追加的な拡大幅は、ともに相対的に大きくなる。こうした結論は、伝統的ケインジアン・モデルを用いた Reifschneider and Williams (2000) による分析結果と整合的である。このことを踏まえると、ニューケインジアン型モデルを用いた本稿による分析結果は、Summers (1991) による政策提言の頑健性を示すものと解釈できる。

(東北大学)

投稿受付2011年11月9日、最終稿受理2012年11月13日

[付録 A] モデルの停留点

本節では、特異解の動学におけるモデル停留点について、詳細を述べる。(17)式より、モデルの停留点は以下のとおりとなる。

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\pi}(t) \end{bmatrix} = -|A_s|^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\kappa}{\theta\beta} \pi^* \\ -\frac{1-\beta}{\beta} \pi^{BL}(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{|A_s|} \begin{bmatrix} \frac{(1-\beta)\kappa}{\theta\beta^2} (\pi^* - \pi^{BL}(t)) \\ \frac{\kappa^2}{\theta\beta^2} \pi^* - \frac{1-\beta}{\beta} \left(\rho - \frac{1-\beta}{\beta} \right) \pi^{BL}(t) \end{bmatrix}.$$

ここで、仮定より $|A_s| < 0$ であることから、 $\pi^* - \pi^{BL} > 0$ である限り、 $\bar{x} > 0$ となることがわかる。したがって、民間のバックワード・ルッキングな期待よりも高い目標を中央銀行が設定することは、短期的なモデル停留点における産出量ギャップの値に、正の影響を及ぼす。すなわち、短期的には貨幣中立性が成立しない。一方、(3)式から明らかのように、 π^{BL} は長期的には π^* に収束する。このとき、

$$\bar{x} = 0, \bar{\pi} = -\frac{1}{|A_s|} \cdot (-|A_s|) \cdot \pi^* = \pi^*$$

が成立する。すなわち、長期均衡では貨幣中立性が成立する。

[付録 B] 連続時間モデルにおける調整過程

本節では、自然利子率ショックが発生した後の、経済の調整過程について詳細を述べる。これはちょうど、Jung *et al.* (2005) の描写する動学過程が、本稿のモデルにおいてどのように表されるかということに対応している。以下では、彼らと同様の状況を扱うために、 $\pi^* = \pi^{BL} = 0$ と置く。

本稿のモデルにおける、 $i=0$ となる端点解の動学方程式は、以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\pi} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = A_c \cdot \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma} r^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} \frac{\kappa}{\sigma\beta} & -\frac{1}{\sigma\beta} & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1-\beta}{\beta} & 0 & 0 \\ 2\theta & 0 & \rho - \frac{\kappa}{\sigma\beta} & \frac{\kappa}{\beta} \\ 0 & 2 & \frac{1}{\sigma\beta} & \rho - \frac{1-\beta}{\beta} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

3.1節で見たとおり、自然利子率に十分大きな負のショックが生じた場合、経済は非負制約に陥り、異なる状態へジャンプする。ニューケインジアン型モデルにおいては π, x, q_1, q_2 のいずれもが未決定変数であるため、この際のジャンプ先の状態は、本質的には不決定となる。

これについて、ジャンプ先の状態と、その後の調整過程の動学経路を一意に決定するためには、以下の2つの仮定が必要となる。

1つめは、状態のジャンプが1回限りであり、その後の調整過程において、それぞれの変数が連続関数として表されることである。ショックによって、経済は端点解の動学で表される状態へジャンプし、最終的には特異解の動学で表される点 E_0 へ戻る。この2つの動学が切り替わる点において、それぞれの変数は連続的に推移するものと仮定する。

2つめには、ショック以前の経済の状態は点 E_0 にあること、そして、ショックによって x, π がジャンプする一方、補助変数はジャンプしないことである。これはすなわち、 $q_1(0) = q_2(0) = 0$ が成立するとともに、その後の調整過程において、これらの値が連続的に推移する、ということの意味する。

以上の条件を満たし、さらに横断性条件を満たす経路が、求める調整過程である。動学が切り替わる点を S 、計画初期時点から点 S までに経過する時間を $t=s$ として、以下の条件が求められる。

$$\begin{bmatrix} C_1 e^{\mu_1 s} + C_2 e^{\mu_2 s} \\ P_{21} C_1 e^{\mu_1 s} + P_{22} C_2 e^{\mu_2 s} \\ P_{31} C_1 e^{\mu_1 s} + P_{32} C_2 e^{\mu_2 s} + C_3 e^{\mu_3 s} + C_4 e^{\mu_4 s} \\ P_{41} C_1 e^{\mu_1 s} + P_{42} C_2 e^{\mu_2 s} + P_{43} C_3 e^{\mu_3 s} + P_{44} C_4 e^{\mu_4 s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(s) \\ p_1 x(s) \\ 0 \\ -\frac{2\theta\beta}{\kappa} x(s) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

ここで $C_i, \mu_i (i=1, 2, 3, 4)$ はそれぞれ、初期値から決まる係数と、行列 A_c の固有値を表す。 $q_1(0), q_2(0)$ が所与であるから、 C_i は $x(0), \pi(0), r^n(t)$ についての線形の関数として表される。 $P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}, P_{41}$

は行列 A_c の固有ベクトルの要素である。(24)式の左辺は、端点解の動学から見た $t=s$ 時点の状態を表す。これは(23)式から導かれる。(24)式の右辺は、特異解の動学から見た、 s 時点の状態を表す。すなわち、(24)式は、点 s における2つの微分方程式体型の連続性を表している。なお、4本の関係式に対し、未知の変数は、 $s, x(s), x(0), \pi(0)$ の4つである。

1つめと2つめ、同様に1つめと4つめの関係式を連立することで、それぞれ $x(s)$ を消去することができる。この2本の方程式は、以下のように表すことができる。

$$\begin{cases} g_1x(0) + g_2\pi(0) + g_3 = 0, \\ g_4x(0) + g_5\pi(0) + g_6 = 0. \end{cases}$$

ここで $g_j (j=1,2,3,4,5,6)$ は、それぞれ $e^{\mu_1s}, e^{\mu_2s}, e^{\mu_3s}, e^{\mu_4s}$ についての線形の関数である。ここから、 $x(0), \pi(0)$ をそれぞれ g_j の関数として表すことができる。これを(24)式の3つめの関係式に代入することで、時間 s についての陰関数が得られる。これを満たす $s > 0$ がただ1つ存在するならば、 $x(0), \pi(0), x(s)$ は一意に存在し、 π, x, i の経路は一意に決定される。

Jung *et al.* (2005) においては、動学の切り替わり時点を示す値は、解析的には求められていない。これに対して本稿では、陰関数であるとはいえ、時間 s を導出するための関係式が得られた。これは、連続時間モデルによる考察の利点の1つである。

[付録 C] 安全マージンの変化量と構造パラメータ

本節では、3.3節における、安全マージンの変化量の符号条件について、詳細を述べる。これまでと同様にして、 $\beta \rightarrow 1$ のケースを考えよう。このとき、(22)式は以下のように書き改められる。

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\partial^2(x_0 - x_{low})}{\partial \rho \partial \pi^*} = -\lim_{\beta \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{M_x^2} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \pi^*} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 N_x}{\partial \rho \partial \pi^*} \cdot M_x \right) \right\}. \quad (25)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial \pi^*} &= \left\{ \frac{\theta - \sigma \kappa}{\theta \beta} \cdot \frac{p_1(1-\beta)\kappa - \kappa^2}{|A_s| \cdot \theta \beta^2} + \frac{\sigma \kappa}{\theta \beta} \right\} \pi^*, \\ \frac{\partial^2 N_x}{\partial \rho \partial \pi^*} &= \frac{\theta - \sigma \kappa}{\theta \beta} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} \left\{ \frac{\kappa^2}{|A_s|^2 \cdot \theta \beta^2} + \frac{\partial p_1}{\partial \rho} \cdot \frac{\kappa}{|A_s| \cdot \theta \beta} - \frac{p_1(1-\beta)\kappa}{|A_s|^2 \cdot \theta \beta^2} \right\} \end{aligned}$$

であるから、 $\beta \rightarrow 1$ のとき、 $\partial N_x / \partial \pi^* \rightarrow 1, \partial^2 N_x / \partial \rho \partial \pi^* \rightarrow 0$ が成り立つ。この結果、(25)式は再び、以下のように書き改められる。

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\partial^2(x_0 - x_{low})}{\partial \rho \partial \pi^*} = -\frac{1}{M_x} \cdot \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\partial M_x}{\partial \rho} = -\frac{1}{M_x} \left\{ \sigma + \frac{\theta - \sigma \kappa}{\theta} \cdot \frac{\kappa}{\lambda_1^2} \cdot \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho} \right\}. \quad (26)$$

さらに、

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 4\kappa^2/\theta}} \right) > 0$$

が成立すること、そしてすでに $M_x > 0$ を前提としていることを踏まえると、 $\theta - \sigma \kappa < 0$ となることが、(26)式が全体として負となるための十分条件であることがわかる。

一定のミクロ的基礎付けを持つニューケインジアン型モデルにおいては、それぞれの構造パラメータは、ディープ・パラメータの関数として表現される。この点を踏まえて、上述した符号条件の妥当性を検証してみよう。仮にモデルの損失関数が、社会損失関数に一致しているとすれば、パラメータ θ は、以下のディープ・パラメータの関数として表現することができる。¹⁵⁾

$$\theta = \frac{\kappa}{\eta}.$$

15) 詳細については、Woodford (2003) を参照。

ここで $\eta(>1)$ は、独占的競争モデルにおける、財についての代替弾力性を表す。これは例えば以下のダイキシット・ステイグリッツ型 (Dixit-Stiglitz aggregator) の消費関数に表れる。

$$C_t = \left[\int_0^1 c_t(i)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}.$$

ここで $i \in (0, 1)$ は、消費財 c_t についてのインデックスである。

Chari *et al.* (2000) によるパラメータ設定は、ニューケインジアン型モデルにおけるベースラインの設定としてしばしば用いられるが、彼らはここで $\eta=10$ としている。これを利用して θ を求めてみると、 $\theta - \sigma\kappa < 0$ が成立することがわかる。これはすなわち、ニューケインジアン型モデルの標準的な設定の下では、この不等式が一般に成立する、ということ意味する。このことを踏まえて、本稿では $\theta - \sigma\kappa < 0$ したがって、 $\partial M_x / \partial \rho > 0$ を仮定する。

[参考文献]

- Adam, Klaus and Roberto M. Billi (2007) "Discretionary Monetary Policy and the Zero Lower Bound on Nominal Interest Rates," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 54, pp. 728-752.
- Ascari, Guido (2004) "Staggered prices and trend inflation: some nuisances," *Review of Economic Dynamics*, Vol. 7, pp. 624-667.
- Benhabib, Jess, Stephanie Schmitt-Grohé and Martín Uribe (2002) "Avoiding Liquidity Traps," *Journal of Political Economy*, Vol. 110, No. 3, pp. 535-563.
- Calvo, Guillermo (1983) "Staggered Prices in a Utility Maximizing Framework," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 12, No. 3, pp. 383-398.
- Chari, V.V., Patrick J. Kehoe and Ellen R. McGrattan (2000) "Sticky Price Models of the Business Cycle: Can the Contract Multiplier Solve the Persistence Problem?" *Econometrica*, Vol. 68, pp. 1151-1179.
- Cogley, Timothy and Argia M. Sbordone (2008) "Trend Inflation, and Inflation Persistence in the New Keynesian Phillips Curve," *American Economic Review*, Vol. 98, No. 5, pp. 2101-2126.
- Eggertsson, Gauti B. and Michael Woodford (2003) "The Zero Bound on Interest Rates and Optimal Monetary Policy," *Brooking Papers on Economic Activity*, Vol. 1, pp. 139-211.
- Henderson, Dale and Warwick J. McKibbin (1993) "A Comparison of Some Basic Monetary Policy Regimes for Open Economies: Implication of Different Degrees of Instrument Adjustment and Wage Persistence," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 39, pp. 221-318.
- Iwamoto, Yasushi (2004) "Monetary and Fiscal Policy to Escape from a Deflationary Trap," *Monetary and Economic Studies*, Vol. 23, No. 1, pp. 1-46.
- Jung, Taehun, Yuki Teranishi and Tsutomu Watanabe (2005) "Optimal Monetary Policy at the Zero-Interest-Rate Bound," *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 37, No. 5, pp. 813-835.
- Reifschneider, David, and John C. Williams (2000) "Three Lessons for Monetary Policy in a Low-Inflation Era," *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 32, No. 4, pp. 936-966.
- Schmitt-Grohé, Stephanie and Martín Uribe (2009) "Liquidity traps with global Taylor Rules," *International Journal of Economic Theory*, Vol. 5, pp. 85-106.
- Summers, Lawrence (1991) "Price Stability: How Should Long-Term Monetary Policy Be Determined?" *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 23, No. 3, pp. 625-631. Part 2: Price Stability.
- Taylor, John B. (1993) "Discretion versus Policy Rules in Practice," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 39, pp. 195-214.
- Woodford, Michael (2003) *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton: Princeton University Press.

《SUMMARY》

OPTIMAL MONETARY POLICY AND A SAFETY MARGIN

By SOICHI ARAI

The objective of this paper is to measure the radius of the safety margin which expands when a central bank adopts a positive inflation target against the zero bound on nominal interest rates. Concretely, we add four supplementary assumptions to the standard New Keynesian model in order to grasp the safety margin.

Through our analysis using the New Keynesian framework, we confirm the advance preparation by the central bank is generally effective. Besides, our analysis reveals that the safety margin is generated effectively by the central bank in long term perspective.

(Tohoku University)